11/10/2016

Μάθημα 3ο
Πιθανότητες.

Βασικές Έννοιες

Τυχαίο Πείραμα (τ.π.)
Δειγματικός Χώρος (δ.χ.): S

Παραδείγματα

1. Ρίψη νομίσματος 1 φορά: $S = \{K, \Gamma\}$
2. Ρίψη ζαριού 1 φορά: $S = \{$⚀$, \ldots,$ ⚅$\} = \{1, \ldots, 6\}$
3. Ρίψη 2 ζαριών 1 φορά: $S = \{(x,y) : x,y = 1,2,\ldots,6\}$
4. Ρίψη νομίσματος 3 φορές

   $S: \underset{1^o}{\underline{K \acute{\eta} \Gamma}} \; \underset{2^o}{\underline{K \acute{\eta} \Gamma}} \; \underset{3^o}{\underline{K \acute{\eta} \Gamma}}$ $2^3 = 8$ δυνατοί τρόποι

   $S = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, \Gamma\Gamma K, \Gamma K\Gamma, K\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma\Gamma\}$

5. Ρίψη νομίσματος συνεχώς μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά Κ.
   $S = \{K, \Gamma K, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma K, \ldots, \Gamma\Gamma\ldots\Gamma K, \ldots\}$

6. Πλήθος πελατών σε ένα σύστημα εξυπηρέτησης
   $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$

7. Χρόνος ζωής ατόμου-συσκευής: $S = [0, \infty)$

Παρατήρηση
Ο δ.χ. μπορεί να είναι πεπερασμένο, αριθμήσιμο ή υπερ-αριθμήσιμο σύνολο.

Ενδεχόμενο: Κάθε $\subseteq$ του δ.χ.

Απλό ή στοιχειώδες: Κάθε ενδεχόμενο μονοσύνολο $\subseteq$ δ.χ.

Το ενδεχόμενο A ($\subseteq S$) θα λέγεται ότι έχει συμβεί ή πραγματοποιηθεί αν το αποτέλεσμα του Τ.Π. είναι στοιχείο του A.

Το αποτέλεσμα αυτό λέγεται ευνοϊκό για το A.

π.χ. ρίψη ζαριού $S = \{1, 2, \ldots, 6\}$

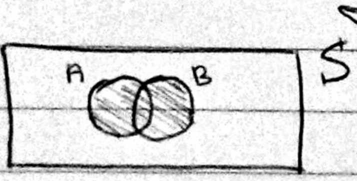
$A = \{\text{άρτιος}\} = \{2, 4, 6\}$

Πράξεις ενδεχομένων

Έστω $A, B \subseteq S$ ενδεχόμενα

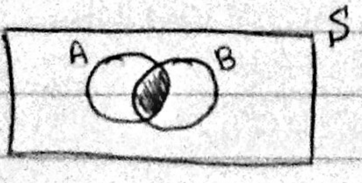
① Το A συνεπάγεται το B αν συνολοθεωρητικά $A \subseteq B$ και πιθανοθεωρητικά η πραγματοποίηση του A έχει σα συνέπεια την πραγματοποίηση του B.

② Ένωση $A \cup B$



Η πραγματοποίηση της $A \cup B$ συνίσταται στην πραγματοποίηση τουλάχιστον ενός από τα A και B

③ Τομή $A \cap B$

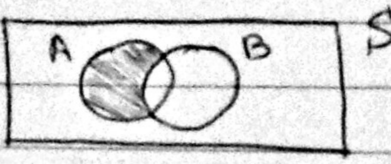


Ταυτόχρονα πραγματοποιούνται τα A κ' B.

④ Συμπλήρωμα A^c ή $\overline{A}$

Το A^c συνίσταται στη μη πραγματοποίηση του A.

⑤ Διαφορά $A-B$



Αν πραγματοποιηθεί το A και δεν πραγματοποιηθεί το B.

Αδύνατο ενδεχόμενο: εκείνο το οποίο δεν πραγματοποιείται
Αδύνατο ενδεχόμενο $\equiv \emptyset$

Βέβαιο ενδεχόμενο: είναι εκείνο που πάντα πραγματοποιείται
βέβαιο ενδεχόμενο $\equiv S$

Ασυμβίβαστα ενδεχόμενα: Τα A και B λέγονται ασυμβίβαστα αν δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα.
δηλαδή αν $A \cap B = \emptyset$.

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας (Laplace ~ 1812)

πχ.
πιθανότητα $\{6\} = \frac{1}{6}$

πιθανότητα {περιττός} = πιθανότητα $\{1,3,5\} = \frac{3}{6}$

Ορισμός: Έστω $S \neq \emptyset$ και πεπερασμένο. Έστω $A \subseteq S$.
Τότε η πιθανότητα του A συμβολίζεται με $P(A)$ και ορίζεται:

$$P(A) = \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων του } A}{\text{πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων του τ.π.}} =$$

$$= \frac{\text{πλήθος στοιχείων του } A}{\text{πλήθος στοιχείων του } S} = \frac{\|A\|}{\|S\|}$$

Ιδιότητες Κλασικού Ορισμού

① $0 \leq P(A) \leq 1$.

② $P(S) = 1$

③ Αν A, B ασυμβίβαστα $(A \cap B = \emptyset)$: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

απόδ: $P(A \cup B) = \frac{\|A \cup B\|}{\|S\|} = \frac{\|A\| + \|B\|}{\|S\|} = \frac{\|A\|}{\|S\|} + \frac{\|B\|}{\|S\|} = P(A) + P(B)$.

④ $P(A^c) = 1 - P(A)$

απόδ: $P(A^c) = \frac{\|A^c\|}{\|S\|} = \frac{\|S\| - \|A\|}{\|S\|} = 1 - \frac{\|A\|}{\|S\|} = 1 - P(A)$

Αδυναμίες Κλασικού Ορισμού

① Το $S \rightarrow$ πεπερασμένο

Έστω $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$

② $P(\{s_i\}) = \frac{\|\{s_i\}\|}{\|S\|} = \frac{1}{k}$ $i = 1, \ldots, k$